UOPŠTENE FUNkCIJE

Može se slobodno reći da je teorija uopštenih funkcija dominirala u matematičkoj analizi više od pola dvadesetog i početka dvadeset prvog veka.

1) Pred drugi svetski rat posebno su se naglo razvijale tehničko tehnološke nauke a sa njima i matematika podstaknuta istraživanjima posebno atomske energije. Sve je to zahtevalo matematički aparat bolje prilagodjen novim istraživnjima. Navešću dva tipična primera koja su usmeravala prilagodjenost matematičkog aparata novim potrebama.

Pojava Dirac-ove δ-„funkcije": $\delta(x) = 0,\ x \neq 0$ i $\int \delta(x)\,dx = 1$ (1926-1927) nije imala korektnu matematičku definiciju, a njeno uvodjenje u elekronici ipak davalo Dirac-u zadovoljavajuće rezultate, ukazivalo je da δ pripada nekom širem skupu, od skupa numeričkih funkcija, sa svojom strukturom i odgovarajućom definicijom integrala.

Drugi karakterističan primer je talasna parcijalna diferencijalna jednačina:

$$(D_x^2 - D_y^2)\, u(x,y) = 0 .$$

Njena rešenja su oblika $u(x,y) = f(x+y) - g(x-y)$ pod pretpostavkom da f i g imaju prvi i drugi izvod. Postavljalo se pitanje: ako se proširi operacija izvoda, da li će i dalje u(x,y) biti rešenje. Vodeći računa da pri modeliranju prirodnih procesa matematički model je samo aproksimacija odredjenog prirodnog procesa.

2) U Evropi su se istakla tri centra u kojima su se razvile osnovne ideje „uopštenih funkcija". Francuska sa L. Schwartz-om, Sovjetski Savez sa S. L. Soboljevim i Poljska sa J. Mikusinskim.

U Francuskoj su najbrže nicale nove ideje jer su se tu već razvile matematićke strukture kao prvi korak u novom shvatanju matematike. Takva struktura svakako je bila vektorsko topološki prostori. Da navedemo: Rad Leray-a Sur le mouvement d´un liquide visquese emplissant l´espace, Acta Math. (1934), seriju knjiga Bourbaki od 1940-1949, rad Dieudonné- Schwartz La dualite´ dans les espace F et LF, An. Inst. Fourier (1949),... To je razlog da je L. Schwartz mogao da objavi svoje dve knjige Théorie des distribution već 1950- 1951 u kojima je dao kompletnu teoriju uopštenih funkcija, distribucija, (sem Laplace-ove transformacije distribucija kojim je dopunio novo izdanje). Godine 1955 pojavila se i knjiga De Rham, Variété differentiables, Formes

courants, formes harmoniques,1955, koja, istina, nije imala toliki uticaj na dalji razvoj uopštenih funkcija.
Ovako Schwartz definiše vektorski prostor distribucija:
Neka je Ω otvoren skup u R^n. **D**(Ω) je vekorski prostor funkcija φ nad R^n, sa kompaktnim nosačem, koje imaju sve izvode. Distribucija $T \in D'(\Omega)$ je linearna neprekidna forma nad **D**(Ω). Topologija u **D**(Ω) je definisana tako da niz $\{\varphi_j\} \subset D(\Omega)$ konvergira ka nuli kada $i \to \infty$ ako postoji kompaktan skup $K \subset \Omega$ tako da sap$\varphi_i \subset K$ za svako φ_i i svaki parcijalni izvod $D^p\varphi_i(x) \to 0$, $i \to \infty$ uniformno po $x \in K$, gde je p ceo pozitivan broj.
Lokalno sumabilna funkcija f, definiše distribuciju T=f :

$$T = \langle T, \varphi\rangle = \int_R f(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Sledi da svaka lokalno sumabilna funkcija definiše distribuciju.
Izvod distribucije T' je $T' = -\langle T, \varphi'\rangle$, a to je ponovo distribucija. Sledi da svaka distribucija ima sve izvode. Tako Heaviside- ova funkcija $Y(x) = 0$, $x<0$, $Y(x) = 1$, $x \geq 0$, ima izvod i

$$Y'(x) = -\langle Y,\varphi'\rangle = - \int Y(x)\, \varphi'(x)\, dx = - \int \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \delta.$$

Dobili smo da je δ distribucija, izvod od Y(x) u teoriji distribucija.
Već je Schwartz zapazio da ne postoji proizvod dve distribucije. Tačnije, da ne postoji diferencijalna algebra **A** koja sadrži algebru ***C_0(R)*** kao podalgebru, zadržavajući izvod funkcija sa Leibnitz-ovim pravilom i sa 1 kao neutralnim elementom u **A.**
Schwartz-ove distribucije imaju strukturu vektorskog prostora.

3) Ruska škola bila je okupirana više traženjem uopštenih rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina, tj. traženje uopštenja izvoda. Ona je bila okrenuta drugom primeru koga smo naveli, parcijalnoj diferencijalnoj talasnoj jednačini. Tu se posebno istakao S.L. Sobolev radom Generalized solutions of the wave equation (II Kongres Sovjetskih matematičara 1934). Napomenimo da je Sobolev već sa 24 godine izabran u Akademiju nauka SSSR-a.
Prostor Soboleva je definisan na sledeći način:
Neka je k ceo broj, a $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Prostor Sobolev-a $H^{(k)}(R^n)$ je prostor svih $u \in L^2$ za koje $D^\alpha u \in L^2(R^n)$, $|\alpha| < k$. Ova definicija se moze prosiriti na L^p.
Treba zapaziti da ako $u \in H^{(1)}(R^n)$, tada ima i „prošireni" izvod u L^2 i on je funkcija iz L^2. Time se obezbedjuje da „uopšteno" rešenje

jeste realna funkcija za razliku od distribucionih rešenja L. Schwartz-a, koja to ne moraju da budu. Naime, obeležimo sa P(D) linearni diferencijalni operator sa konstantnim koeficientima

$$P(D) = \Sigma_{|i| \leq m} a_i D^i, \; |i| = i_{1,}+\ldots+ i_m .$$

Koristićemo se radom: L. Hörmander, Analysis of linear partial differential operators I.II, Springer Verlag, 1983. da vidimo šta Schwartz-ova teorija kaže o „uopštenim" rešenjima.

Jednačina P(D) = f ima rešenje u $\in$ **D´(**Ω) za svaku distribuciju f $\in$ **D´(**Ω) ako i samo ako je Ω P- konveksno za nosač i singularni nosač .

Svaki diferencijalni operator sa konstantnim koeficijentima P(D) $\neq$ 0, ima fundamentalno rešenje u **D**´ (P(D) E = δ).

Napomenimo da izmedju ruske škole i francuske škole, sto se tiče „uopštenih" rešenja, zvaničnog kontakta pre II svetskog rata nije ni bilo. To se moze pravdati političkim razlozima. On se ipak odvijao ličnim prijateljstvom pojedinaca. Može se zapaziti veza M. Hadamard-a i S.L. Soboleva.

Iako iz ugledne gradjanske ruske porodice, Sobolev je bio visoki funkcioner Komunističke partije SSSR-a. Pred sam II svetski rat, angažovan od partije, umanjio je svoje aktivnosti u razvoju teorije „uopštenih" rešenja. Tek posle II svetskog rata medjusobni uticaji ruske i francuske škole zavisilo je od matematičkog modela koja će se rešenja tražiti i izučavati, klasična ili „uopštena".

Ruska škola je razvijala teoriju „uopštenih" rešenja insistirajuci da ta rešenja ostaju u klasi numeričkih funkcija iako su bila „uopštena" rešenja. No i pored toga ideje L. Schwartz-a prihvatane su i od ruskih matematičara. U tom smislu svojim rezultatima isticali su se fizičar N. N. Bogoljubov i kasnije njegov djak, V. S . Vladimirov. Bogoljubov je uopštene funkcije koristio i da objasni zbivanja u atomskoj fizici koristeći „uopštene funkcije" (vidi On automodel asymptotics in quantum field theory, Proceedings of the Steklov institute of Mathematics, 1978, tome I). Teško je pratiti rezultate i medjusobna prožimanja u matematici dva najjača centra i još par godina po završetku II svetskog rata. Mnogi rezultati ostali su u vojnim arhivama.

4) Treći prodor u teoriju uopštenih funkcija koristi se algebarskim strukturama. Njega je razvio poljski matematičar J. Mikusinjski u radu: Sur les fondaments de calcul opératoire, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70. Istina tu je on počeo od komutativnog prstena $\boldsymbol{C_o}$ neprekidnih

funkcija nad $[0,\infty)$ sa operacijama + i * . A kasnije je pokazao da se dobije isto kada se počne od prstena $L_{loc}[0,\infty)$ sa istim operacijama.

U prostoru $L_{loc}[0,\infty)$ imamo dve operacije : operaciju sabiranja (+) i operaciju konvolucije (*) . Za f, g $\in L_{loc}[0, \infty)$, f * g je

$$f * g = \int_0^t (t-x)\, g(x)\, dx .$$

Sa ove dve operacije $L_{loc}[0,\infty)$ je komutativni prsten bez delioca nule koji se može proširiti na polje **M** , polje operatora Mikusinskog. Može se pokazati da postoje elementi **M** koji nisu distribucije i distribucije koje nemaju odgovarajuci elemenat u M. Ali **M** i **D**´(Ω) imaju zajednički deo. **M** ima bogatu algebarsku strukturu, ali topoloska struktura definisana je preko „otvorenih skupova" za koje ne postoji topologija u kojima su to otvoreni skupovi u klasičnom smislu. Tako se dobiva konvergencija nizova u **M** : Niz $\{a_n\} \in$ **M** konvergira u **M** ako postoji q $\in$**M** , tako da $\{q\, a_n\} \in$ ***C*ₒ** i konvergira u $\boldsymbol{C}_o$. Takva definicija „kvazi" topologije podstakla je izučavanje šire strukture od klasične topologije .

Kada se pojavila knjiga J. Mikusinskog : Jan Mikusinski, Rachunek operatorow, Warsawa 1953, u kojoj je on razradio tekst iz Studie na pristupačan način i za nematematičare , vrlo brzo je zapažena i već 1954. je izašao prevod na ruski jezik.

5) Sve tri varijante uopštenih funkcija brzo su osvajale matematičku analizu i njenu primenu. Uopštene funkcije su se bogatile novim elementima. Postalo je pravilo da kada se formuliše problem analize koji se rešava, prvo se precizira klasa funkcija (klasična ili uopštena) i njene osobine u kojoj se očekuje rešenje. H. Komatsu u knjizi Microlocal analysis in Gevrey classes and in complex domains , University of Tokyo, 1991, navodi spisak takvih istaknutih klasa i autore koji su najviše doprineli njihovoj razradi i upotrebi:

$\mathcal{O}$	holomorphic functions	Cauchy
$\mathcal{A}$	real analytic functions	Martineau
$E^{(s)}$	Gevrey classof functions	Gevrey
$E^{\{s\}}$	〃	〃
E	infinitely differentiable functions	E.Borel, Whitney

C^m	m times continuously differentiable functions	Cauchy
L^p	p-th summable functions	Lebesgue, F.Riesz
M^1	complex measures	F.Riesz, Kakutani
D'	distributions	L. Schwartz
$D^{(s)'}$	ultradistributions	Beurling
$D^{\{s\}'}$	„	Roumieu
B	hyperfunctions	Sato
O'	analytic functionals	Fantappié, Martineau.

Ukazacemo na dve klase od navedenih uopstenih funkcija.

Ultradistribucije. Podjimo od niza pozitivnih brojeva M_p , p=0,1,2,... koji zadovoljava sledece veze $M_0 = M_1 = 1$

(M.1) $M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1}$, p=1,2,...

(M.2) Postoje konstante A i H takve da $M_p \leq AH^pM_qM_{p-q}$, $q \leq p$, p=1,2,...

(M.3)´ $\Sigma_{p=1}^{\infty} M_{p-1}/M_p < \infty$.

Beskonačno diferencijabilnu funkciju f nad otvorenim skupom Ω u R^n zvaćemo ultradiferencijabilnom klasom (M_p) , odnosno klase $\{M_p\}$ ako za svaki kompaktan skup K u Ω i h > 0 postoji konstanta C , odnosno postoje konstante h i C , tako da je

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|} .$$

Označićemo sa $E^{(M_p)}(\Omega)$ (odnosno $E^{\{M_p\}'}(\Omega)$) prostor funkcija klase (M_p) (odnosno klase $\{M_p\}$) nad Ω .

U daljem znak * označavaće klasu (M_p) ili $\{M_p\}$. Sa ovom oznakom

$$D^*(\Omega) = \{f \in E^*(\Omega);\ \text{supp } f \text{ is compact}\}.$$

Definicija ultradistribucije. Ultradistribucija T klase * nad otvorenim skupom Ω u R^n je linearna neprekidna funkcionela na $D^*(\Omega)$. $D^{(M\ )'}$ su ultradistribucije Beurling-a , a $D^{\{M\ \}'}$ ultradistribucije Roumieu-a.

Teorija *hiperfunkcija* imala je drugi put nastanka. Uveo ih je japanski matematičar M. Sato, On a generalisation of the concept of functions, Proc.Japan Acad., 34 , (1958), 126-130 and 604-608. Istina, kako kaze H. Komatszu (An introduction to the theory of Hyperfunctions, Springer, 1973, p.p. 3-40) tu je ostalo nedokazanih tvrdnji koje su kasnije nadopunjene.

Evo kako H. Komatszu interpretira M. Sato-a kada definiše Hiperfunkcije.

Neka je Ω otvoren interval (a,b) ili otvoren skup u **R** . Intuitivno, hiperfunkcija f nad Ω je razlika graničnih vrednosti jedne proizvoljne holomorfne funkcije F definisane izvan Ω ,

$$f(x) = F(x+i0) - F(x-i0).$$

Da bi precizirali definiciju hyperfunctije preko ove formule, treba da okarakterišemo one holomorfne funkcije F za koje je ova razlika nula. To imamo u teoremi Painlevé-a . Sada se može definisati hiperfunkcija na Ω .

Pretpostavimo da je V otvoren skup u **C** koji sadrži Ω kao relativno zatvoren skup. Tada su hiperfunkcije nad Ω po definiciji elementi prostora

$$\mathbf{B}(\Omega) = \mathbf{O}(V\backslash\Omega)/\mathbf{O}(V) ,$$

Gde su **O**(v) i **O**(V\Ω) prostori svih holomorfnih funkcija nad V i V\ Ω, respectivno.

Ako F $\in$ **O**(V\ Ω) , tada ćemo označiti sa [F] klasu od F i zvaćemo F

funkcijom koja definiše hiperfunkciju [F].

Polje operatora **M** Mikusinskog kao uopštene funkcije imalo je znatno manju primenu od prethodne druge dve koncepcije. Uopštene funkcije definisane u **M** bilo je mnogo teže povezati sa realnim veličinama , pa je tumačenje „uopštenih" rešenja otežalo primenu.

Treće izdanje knjige J. Mikusinskog izašlo je u Berlinu 1957. a četvrto 1957. ponovo u Warsawi. Peto izdanje izašlo je kao Volume I (1983) i Volume II , sastavljena od J. Mikusinskog i T. Boehme (1987). Ovo peto izdanje izašlo je na engleskom i sadrži glavne rezultate što je ova teorija donela. Smrću akademika J. Mikusinskog prestala je aktivnost grupe oko

J. Mikusinskog, a time i glavnog potstrekača upotrebe elemenata polja **M** kao uopštenih rešenja.

6) Videli smo da distribucije imaju strukturu Vektorskog prostora. U teoriji distribucija mogle su se rašavati samo linearne jednačine, linearne parcijalne diferencijalne jednačine.

Francuski matematičar J. F. Colombeau knjigom New generalized functions and multiplication of the distributions, North Holland, Amsterdam, 1983, podstakao je izučavanje algebri koje će sadržati vektorski prostor distribucija. Istina već 1966 štampana je knjiga E.E. Rosinger, Embedding of the **D**´ distributions into pseudotopological algebras, Stud. Cerc. Math. Vol. 18, no. 5, 1966, p. 687-729. ali Rosinger nije uspeo da zainteresuje veći broj matematičara za svoje ideje i svoje konstrukcije.

Postoje više varijanti diferencijalnih algebri koje ukazuju na ideje J.F. Colombeau. Mi ćemo se upoznati sa onom koja je izložena u knjizi M. Nedeljkov, S. Pilipović, D. Scarpalezos, The linear theory of Colombeau generalized functions, Longman Limited, 1998.

Neka je Ω otvoren skup u R^n i $\mathbf{D}(\Omega)$ skup koji smo definisali kao osnovni skup za distribucije. Sa $\mathbf{A_0}(\mathbf{R^n})$ obeležimo skup funkcija $r \in \mathbf{D}(\Omega)$ takve da je $\int_R r(t)\,dt = 1$, a sa $\mathbf{A_q}(\mathbf{R^n}),\ \mathbf{q} \in \mathbf{N}$, skup funkcija $r \in \mathbf{A_0}$ i $r \in \int_R t^i r(t)\,dt = 0$, $|i| \leq q$.

$\mathbf{E}(\Omega)$ skup funkcija R koje preslikavaju $\mathbf{A_0} \times \Omega \rightarrow C$ tako da za svako $r_0 \in \mathbf{A_o}$ elementu $(r_0,x) \in \mathbf{A_o} \times \Omega$ opredeljuje $R(r_0,x) \in \mathbf{D}(\Omega)$. To pokazuje da je za fiksno r_0 , odgovarajuće $R(r_0,x) \in \mathbf{D}(\Omega)$ **.**

Elemenat $R \in \mathbf{E}(\Omega)$ je „moderate" ako za svaki kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$, i $\alpha \in \mathbf{N}^\alpha$ postoji $N \in \mathbf{N}$**, tako da za svako** $r \in \mathbf{A}_N$ postoj $\eta > 0$ i C > O tako da

$$|\partial^\alpha R(r_\varepsilon,x)| \leq C\,\varepsilon^{-N}\ ,\ x \in K\ ,\ 0<\varepsilon < \eta.$$

Skup "moderate" elemenata obeležićemo sa $\mathbf{E_M}(\Omega)$**.** Elemenat $R \in \mathbf{E_M}(\Omega)$ zvaćemo nulom ako za svako $m \in \mathbf{N}$ i $a \in \mathbf{R}$ **postoji** $N \in \mathbf{N}$ tako da

za svko $r \in \mathbf{A}_N$

$$\mu_m(R(r_\varepsilon\ ,x)) = O(\varepsilon^a),\ \varepsilon \rightarrow 0,\ \ \mu_m \text{ je niz semi normi u } \mathbf{D}(\Omega)\ .$$

Prostor nula elemenata obelezićemo sa *N(*Ω*).*

Prostor G(*Ω*) = E*$_M$*(*Ω*)/ N(*Ω*) je prostor uopštenih funkcija po J.F. Colombeau . u njemu su se mogle rešavati i jednačine koje su sadržale i drugu operaciju koja se javljala u strukturi algebre.